

Тема 19

<https://github.com/v--/se2018>

Проверка на хипотези.

Янис Василев

Оригинал: 28 юни 2019

Ревизия: 9c26f56 от 04 ноември 2024

За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Лемата на Нейман-Пирсън е базирана на изложението ѝ в Димитров и Янев, [Вероятности и статистика](#).

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от [Конспект за ДИ за спец. статистика](#).

1. Определение за статистическа хипотеза.
2. Прости и сложни хипотези.
3. Определения за грешки от първи и втори род, критична област, мощност, значимост на тест и значимост на статистиката на теста.
4. Лема на Нейман-Пирсън.

1.2. Основни понятия

Считаме, че е зададено вероятностно пространство (Ω, \mathcal{F}, P) .

Определение 1 (Извадки). Нека ξ е случайна величина над (Ω, \mathcal{F}, P) . Множеството от елементарни събития Ω в статистиката често се нарича **генерална съвкупност**.

- Ако случайните величини ξ_1, \dots, ξ_n са независими две по две и имат същото разпределение като ξ , казваме, че ξ_1, \dots, ξ_n са **наблюдения** над ξ и че те са **проста извадка** с обем n над генералната съвкупност Ω . Понякога ги разглеждаме и като случаен вектор $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

- **Функция на правдоподобие** $l_{\xi}(x)$ на случайната величина ξ наричаме, в абсолютно непрекъснатия случай, плътността на ξ или, в дискретния случай, функцията на вероятностите на ξ .
- **Функция на правдоподобие** $l(x_1, \dots, x_n)$ на извадката ξ_1, \dots, ξ_n наричаме функцията на правдоподобие на случайния вектор $\vec{\xi}_n$. При извадки от независими случайни величини, функцията на правдоподобие на извадката е произведение на индивидуалните функции на правдоподобие.
- **Извадково пространство**, съответстващо на извадката ξ_1, \dots, ξ_n , наричаме множеството $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ от стойности на случайния вектор $\vec{\xi}_n$.
- **Реализации** на извадката наричаме вектори от \mathcal{X} . Те моделират истинските данни в математическата статистика, съпоставяйки ги на „теоретичната“ извадка ξ_1, \dots, ξ_n .

Определение 2 (Хипотези). Нека ξ_1, \dots, ξ_n е проста извадка над случайната величина ξ , чието разпределение не ни е известно.

- Всяко предположение за разпределението на ξ наричаме **статистическа хипотеза**. Формално, хипотезата H често се представя като множество от възможни функции на разпределение на ξ . При повече от една хипотеза, искаме те да не се пресичат. Условна вероятност при условие, че $F_{\xi} \in H$, обикновена записваме чрез

$$P(\cdot | H).$$

Обикновено се разглеждат само две хипотези: **нулевата хипотеза** H_0 и **алтернативната хипотеза** H_1 .

- При **параметричната** статистика хипотезите се отнасят за параметри на семейства от разпределения, например за очакването μ на нормално разпределение или степента λ на поасоново разпределение. В противен случай говорим за **непараметрична** статистика. В непараметричния случай считаме, че двете хипотези съдържат едновременно само дискретни или само непрекъснати разпределения.
- За да направим заключение за верността на една хипотеза ни е необходим **статистически критерий**. Формално, статистическите критерии са изображения $\delta : \mathcal{X} \rightarrow \{H_0, H_1\}$, съпоставящи на реализация на извадка някоя хипотеза. Да отбележим, че критерият δ сам по себе си е случайна величина.
- Един критерий ни казва коя хипотеза да **приемем** и коя да **отхвърлим**, обикновено на базата на данни от експеримент, т.е. на някоя реализация на извадка над ξ . Поради случайния характер на експериментите, обаче, при практически задачи е възприета терминологията „имаме/нямаме основание да отхвърлим хипотезата H на база на данните“ или „хипотезата H е/не е съвместима с данните“.
- **Статистически тест** наричаме набор от хипотези и съгласуван с тях критерии.

- Вероятността α за **грешка от първи род** или **ниво на съгласие** или **ниво на значимост** е вероятността да отхвърлим вярна нулева хипотеза, т.е.

$$\alpha := P(\delta = H_1 | H_0).$$

Стойността $\gamma := 1 - \alpha$ наричаме **значимост** или **ниво на доверие** на теста.

- „Вероятността β за грешка от втори род“ е вероятността да приемем грешна нулева хипотеза, т.е.

$$\beta := P(\delta = H_0 | H_1).$$

Стойността $\pi := 1 - \beta$ наричаме **мощност** на теста.

- **Критична област** W_α с ниво на значимост α наричаме произволно множество $W_\alpha \subseteq \mathcal{X}$ от реализации на извадката с $P(\vec{\xi}_n \in W | H_0) = \alpha$, попадайки в което **отхвърляме** нулевата хипотеза.

Всяка критична област задава критерия

$$\delta(x) = \begin{cases} H_1, & x \in W, \\ H_0, & x \notin W. \end{cases}$$

- Нека са зададени хипотезите H_0 и H_1 и е фиксирано ниво на значимост α . Критичната област

$$W_\alpha^* := \operatorname{argmax}_{W_\alpha \subseteq \mathcal{X}} P(\vec{\xi}_n \in W_\alpha | H_1),$$

осигуряваща най-голяма мощност на теста, наричаме **оптимална критична област**.

- Хипотезата наричаме **проста**, ако на нея отговаря точно едно разпределение. В противен случай я наричаме **сложна**. Ако имаме една проста хипотеза и една сложна, избираме нулевата да бъде проста. Така имаме три случая:

1. Проста хипотеза срещу проста алтернатива,
2. Проста хипотеза срещу сложна алтернатива,
3. Сложна хипотеза срещу сложна алтернатива.

- Разглеждаме тест с две хипотези H_0 и H_1 като множества от възможни функции на разпределение на ξ . Имаме три случая

- Ако $F_1(x) \leq F_0(x) \quad \forall F_0 \in H_0, F_1 \in H_1$, наричаме теста **ляв едностранен**
- Ако $F_1(x) \geq F_0(x) \quad \forall F_0 \in H_0, F_1 \in H_1$, наричаме теста **десен едностранен**
- В противен случай, наричаме теста **двустранен**

- Нека H_0 е проста хипотеза и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ е реализация на извадка. **Значимост** или **p -стойност** на реализацията x наричаме условната вероятност спрямо нулева хипотеза H_0 на опашките на разпределението на ξ , определени от типа на теста.

В зависимост от типа на теста разполагаме с няколко формални определения за значимост на реализация:

$$p := \begin{cases} P(x \geq \xi | H_0), & \text{за леви едностранни тестове} \\ P(x \leq \xi | H_0), & \text{за десни едностранни тестове} \\ 2 \min(P(x \leq \xi | H_0), P(x \geq \xi | H_0)) & \text{за двустранни тестове} \end{cases}$$

Често се казва, че значимостта на x е вероятността да наблюдаваме „по-екстремна“ стойност от x .

1.3. Лема на Нейман-Пирсън

Лема 3 (Нейман-Пирсън). Нека са дадени две прости хипотези за функцията на правдоподобие на извадка ξ_1, \dots, ξ_n над случайна величина ξ ,

$$\begin{cases} H_0 : l(x) = l_0(x) \\ H_1 : l(x) = l_1(x). \end{cases}$$

Считаме, че е зададено ниво на съгласие α . Ако за някоя реална константа $c > 0$ за критичната област W_α са изпълнени неравенствата

$$\begin{aligned} l_0(x) &\leq c \cdot l_1(x), x \in W_\alpha, \\ l_0(x) &\geq c \cdot l_1(x), x \notin W_\alpha, \end{aligned}$$

тогава W_α е оптимална критична област.

Забележка 4. В общия случай стойностите $x \in \mathcal{X}$, за които $l_0(x) = cl_1(x)$, могат както да лежат в критичната област, така и извън нея.

Доказателство. Ще докажем теоремата само за абсолютно непрекъснати разпределения. В общия случай римановите интеграли могат да се заменят с интеграли по вероятностни мерки, съответстващи на двете хипотези.

Нека U_α е произволна друга критична област за същия тест с ниво на съгласие α . Означаваме $Q(A) := P(\vec{\xi}_n \in A)$.

Ще докажем, че $Q(U_\alpha | H_1) \geq Q(W_\alpha | H_1)$. Поради адитивността на вероятностните

мерки имаме

$$\begin{aligned}
& Q(W_\alpha | H_1) - Q(U_\alpha | H_1) = \\
& = Q((U_\alpha \cap W_\alpha) \cup (W_\alpha \setminus U_\alpha) | H_1) - Q((U_\alpha \cap W_\alpha) \cup (U_\alpha \setminus W_\alpha) | H_1) = \\
& = Q(U_\alpha \cap W_\alpha | H_1) + Q(W_\alpha \setminus U_\alpha | H_1) - Q(U_\alpha \cap W_\alpha | H_1) - Q(U_\alpha \setminus W_\alpha | H_1) = \\
& = Q(W_\alpha \setminus U_\alpha | H_1) - Q(U_\alpha \setminus W_\alpha | H_1) = \\
& = \int_{W_\alpha \setminus U_\alpha} l_1(x) dx + \int_{U_\alpha \setminus W_\alpha} (-l_1(x)) dx \geq \\
& \geq \frac{1}{c} \int_{W_\alpha \setminus U_\alpha} l_0(x) dx + \frac{1}{c} \int_{U_\alpha \setminus W_\alpha} (-l_0(x)) dx = \\
& = \frac{1}{c} \left(\int_{W_\alpha \setminus U_\alpha} l_0(x) dx - \int_{U_\alpha \setminus W_\alpha} l_0(x) dx \right) = \\
& = \frac{1}{c} [Q(W_\alpha \setminus U_\alpha | H_0) - Q(U_\alpha \setminus W_\alpha | H_0)] = \\
& = \frac{1}{c} [Q(U_\alpha \cap W_\alpha | H_0) + Q(W_\alpha \setminus U_\alpha | H_0) - Q(U_\alpha \cap W_\alpha | H_0) - Q(U_\alpha \setminus W_\alpha | H_0)] = \\
& = \frac{1}{c} [Q(W_\alpha | H_0) - Q(U_\alpha | H_0)] = \\
& = \frac{1}{c} (\alpha - \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

□

2. Литература

Димитров, Боян и Николай Янев. *Вероятности и статистика*. 2-е изд. Софтех, 2007.
 Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: <https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrnd0sX> (дата на посещ. 24.03.2019).