

Тема 1

<https://github.com/v--/se2018>

Уравнение на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.

Янис Василев

Оригинал: 11 юни 2019

Ревизия: 9c26f56 от 04 ноември 2024

За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Теорията е до голяма степен базирана на Богдан Александров (лекции), Станислав Иванов (упражнения) и Янис Василев (записки), [Записки от лекции и упражнения по аналитична геометрия](#).

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от [Конспект за ДИ за спец. статистика](#).

1. Пррави в равнината и пространството.
 - а) Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина.
 - б) Общо уравнение на права в равнината.
 - в) Декартово уравнение.
 - г) Взаимно положение на две прави.
 - д) Нормално уравнение на права.
 - е) Разстояние от точка до права.
 - ж) Ъгъл между прави.
2. Равнини в пространството.
 - а) Общо уравнение на равнина.
 - б) Взаимно положение на две равнини.
 - в) Нормално уравнение на равнина.
 - г) Разстояние от точка до равнина.

3. Криви от втора степен.

- а) Уравнение на окръжност.
- б) Канонични уравнения на елипса, хипербола и парабола.
- в) Фокални свойства на елипса, хипербола и парабола.

1.2. Прави в равнината

Нека $K = Oxy$ е афинна координатна система в равнината A_2 . Считаме, че е зададена единична отсечка за измерване на дължини.

Определение 1. Нека l е права в A_2 , нека са дадени т. $P_0 \in l$ и направляващият за l вектор $v \parallel l$. Очевидно векторът v е ненулев. Нека $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$ и $r = \overrightarrow{OP}$ са радиус-векторите на точките т. P_0 и т. P спрямо K .

От тъждествата $r - r_0 = \overrightarrow{P_0P} \parallel v \iff P \in l$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R} : v \parallel \lambda v$ следва, че правата l удовлетворява уравнението

$$l : r = r_0 + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R},$$

което наричаме **векторно параметрично уравнение** на l спрямо K .

Нека т. P_0 , т. P и v имат координати $P_0(x_0, y_0)$, $P(x, y)$ и $v(a, b)$ спрямо K . Уравненията

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

наричаме **система скалярни параметрични уравнения** на l спрямо K .

Изхождайки от горната система, имаме $\lambda ab = b(x - x_0) = a(y - y_0)$, откъдето получаваме уравнението $l : bx + (-a)y + (-x_0 + y_0) = 0$.

Определение 2. Нека правата l се задава спрямо K с уравнението $l : Ax + By + C = 0$, където $A, B, C \in \mathbb{R}$, т.е. уравнението е изпълнено за координатите на т. $P(x, y)$ точно когато т. $P \in l$.

Уравнение от този вид наричаме **общо уравнение на правата l** спрямо K .

Забележка 3. От определението е ясно, че е изпълнено $A \neq 0$ или $B \neq 0$, тъй като в противен случай уравнението е еквивалентно на $l : C = 0$ и, в зависимост от стойността на C , уравнението задава или празното множество, или цялата равнина A_2 .

Вече видяхме, че от всяка система скалярни параметрични уравнение за права l можем да намерим поне едно общо уравнение за l . Ще докажем съществуване на общо уравнение за равнина по друг начин.

Твърдение 4. Всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където A и B не са едновременно равни на 0, е уравнение на точно една права спрямо K .

Доказателство. Без ограничение на общността допускаме, че $A \neq 0$.

Да забележим, че уравнението има поне едно решение, например $x = -\frac{C}{A}$ и $y = 0$.

Нека е дадена точката $P_0(x_0, y_0)$, чиито координати удовлетворяват уравнението. Нека v е ненулевият вектор с координати $v(B, -A)$. Тогава системата

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda B \\ y = y_0 - \lambda A, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

е система скалярни параметрични уравнения за някаква права l . Ще покажем, че тази система е еквивалентна на даденото уравнение.

От една страна, всяко решение на общото уравнение удовлетворява системата, тъй като $C = -Ax_0 - By_0$. Получаваме

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ x &= -\frac{C}{A} - \frac{By}{A}, \\ x &= \frac{Ax_0 + By_0}{A} - \frac{By}{A}, \\ x &= x_0 + \frac{y_0 - y}{A}B. \end{aligned}$$

Полагаме $\lambda := \frac{y_0 - y}{A}$, откъдето получаваме

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda B \\ y = y_0 - \lambda A \end{cases}.$$

От друга страна, всяко решение на системата удовлетворява общото уравнение, тъй като

$$A(x_0 + \lambda B) + B(y_0 - \lambda A) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + (\lambda AB - \lambda AB) = 0 + 0 = 0.$$

□

Определение 5. Нека правата l има спрямо K общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$. Нека още l не е успоредна на оста Oy . Тогава $B \neq 0$ и можем да запишем общото уравнение във вида

$$l : \frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0 \quad \sim \quad l : y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right).$$

Полагаме $k = -\frac{A}{B}$ и $m = -\frac{C}{B}$. Уравнението

$$l : y = kx + m$$

наричаме **декартово уравнение** на l спрямо K , а коефициента k наричаме **ъглов коефициент** на l спрямо K .

Определение 6.

1. **Ъгъл между две пресекателни прави** наричаме по-малкия от двата ъгъла, които те сключват.

Ако е зададена ориентация, **ориентиран ъгъл между пресекателни прави** наричаме ъгъла, на който трябва да бъде завъртяна спрямо зададената ориентация първата права около пресечната си точка с втората права, за да съвпадне с нея.

2. **Ъгъл между два лъча с общо начало** наричаме по-малкия от двата ъгъла, които те сключват.

Ориентиран ъгъл между два лъча с общо начало наричаме ъгъла, на който трябва да бъде завъртян спрямо зададената ориентация първият лъч относно началната си точка, за да съвпадне с втория.

3. Нека са дадени ненулеви свободните вектори u и v . **Ъгъл между u и v** наричаме по-малкия от двата ъгъла между два произволни техни представителя с общо начало и бележим с $\angle(u, v)$.

Ориентиран ъгъл между u и v наричаме ъгъла, на който трябва да бъде завъртян някой представител на u спрямо зададената ориентация, за да съвпадне с някой представител на v .

И двете дефиниции са коректни, понеже всички представители на u са колинеарни помежду си и сключват еднакви ъгли с представители на v , които също са колинеарни помежду си.

Твърдение 7. Нека координатната система $K = Oxy$ е ортонормирана и правата l има спрямо K декартово уравнение $l : y = kx + t$. Дефинираме лъча $\vec{r} : y = kx + t \geq 0$, лежащ върху l . Тогава $\tan \angle(\vec{r}, Ox) = k$.

Доказателство. Нека u е векторът с координати $u(1, k)$ спрямо K .

Ако $k \geq 0$, то $u \uparrow \vec{r}$ и

$$\tan \angle(\vec{r}, Ox) = \tan \angle(u, Ox) = k.$$

Ако $k < 0$, то $u \downarrow \vec{r}$ и

$$\tan \angle(\vec{r}, Ox) = \tan(\pi - \angle(-u, Ox)) = -\tan \angle(-u, Ox) = -(-k) = k.$$

□

Теорема 8. Нека правите l_1 и l_2 имат спрямо K общи уравнения

$$l_i : A_i x + B_i y + C_i, i = 1, 2. \quad (1)$$

Означаваме

$$L := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{L} := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Тогава

1. $l_1 \equiv l_2 \iff \text{rank } L = \text{rank } \tilde{L} = 1.$
2. $l_1 \parallel l_2, \text{ но } l_1 \not\equiv l_2 \iff 1 = \text{rank } L < \text{rank } \tilde{L} = 2.$
3. $l_1 \text{ и } l_2 \text{ са пресекателни} \iff \text{rank } L = \text{rank } \tilde{L} = 2.$

Доказателство. Да забележим, че

1. L е подматрица на $\tilde{L} \implies \text{rank } L \leq \text{rank } \tilde{L}.$
2. A_1 и B_1 са коефициенти в общо уравнения на права, съответно поне един от тях е различен от нула и $\text{rank } L \geq 1.$
3. Матрицата \tilde{L} има само два реда, следователно $\text{rank } \tilde{L} \leq 2.$

Така получаваме $1 \leq \text{rank } L \leq \text{rank } \tilde{L} \leq 2.$

Разглеждаме матричното уравнение

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

което ни дава едновременните решения на уравненията (1).

Ако $\text{rank } L \neq \text{rank } \tilde{L}$, то по теоремата на Руше матричното уравнение (2) няма решение, правите l_1 и l_2 нямат общи точки и $l_1 \parallel l_2$. Обратно, ако правите са успоредни, те нямат общи точки, матричното уравнение (2) няма решения и $\text{rank } L \neq \text{rank } \tilde{L}$.

Ако $\text{rank } L = \text{rank } \tilde{L}$, то по теоремата на Руше матричното уравнение (2) има поне едно решение. Разглеждаме два случая:

1. Ако $\text{rank } L = \text{rank } \tilde{L} = 1$, то редовете на L са линейно зависими, следователно уравненията (1) са еквивалентни и задават едно и също множество. Тъй като и двете са уравнения на прави, те задават една и съща права.

Обратно, нека уравненията (1) задават една и съща права и нека за определеност $A_1 \neq 0$. Тогава за произволна точка $P(x, y) \in l_1 \equiv l_2$ имаме

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \implies x = -\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1},$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

$$-A_2 \left(\frac{B_1}{A_1} y + \frac{C_1}{A_1} \right) + B_2 y + C_2 = 0,$$

$$\left(B_2 - \frac{A_2}{A_1} B_1 \right) y + \left(C_2 - \frac{A_2}{A_1} C_1 \right) = 0.$$

Последното уравнение е еквивалентно на системата

$$B_2 = \frac{A_2}{A_1} B_1 \qquad C_2 = \frac{A_2}{A_1} C_1.$$

Тогава второто уравнение от (1) има вида

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = \frac{A_2}{A_1}A_1x + \frac{A_2}{A_1}B_1y + \frac{A_2}{A_1}C_1 = 0,$$

откъдето виждаме, че двете уравнения са пропорционални и следователно

$$\text{rank } \tilde{L} = 1.$$

2. Ако $\text{rank } L = \text{rank } \tilde{L} = 2$, то системата (2) има максимален ранг и решението е единствено. Това е пресечната точка на l_1 и l_2 .

Обратно, ако l_1 и l_2 имат само една обща точка P , то координатите ѝ удовлетворяват (2). По теоремата на Руше това или е единственото решение, или има още безброй решения. Но вече видяхме, че системата има безброй решения точно при $\text{rank } \tilde{L} = 1$. Следователно координатите на P са единственото решение на (2) и матрицата L има максимален ранг 2.

□

Следствие 9. Ако правата l има общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$ спрямо K , то всяко общо уравнение спрямо K има вида $l : \lambda(Ax + By + C) = 0$ за някое $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Определение 10. Всеки вектор, перпендикулярен на някоя права l , се нарича **нормален** за l .

Твърдение 11. Ако правата l има общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$ спрямо K и K е ортонормирана, то

1. векторът $v(-B, A)$ е ненулев и колинеарен с l .
2. векторът $n(A, B)$ е ненулев и нормален за l .

Доказателство. По условие имаме, че A и B не са едновременно равни на 0, следователно v и n са ненулеви.

1. Разглеждаме точката $P_0(x_0, y_0) \in l$ и точката $P_1(x_0 - B, y_0 + A)$, която също принадлежи на l , тъй като

$$A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + (-AB + AB) = 0 + 0 = 0.$$

Тогава $\overrightarrow{P_0P_1} \parallel l$. Но векторът $\overrightarrow{P_0P_1}(-B, A)$ е равен на v , следователно $v \parallel l$.

2. Тъй като координатната система K е ортонормирана, имаме

$$\langle v, n \rangle = -AB + AB = 0,$$

следователно $v \perp n$ и тъй като v е направляващ за l , то n е нормален за l .

□

Определение 12. Общото уравнение $l : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ на права l спрямо ортонормирана K се нарича **нормално**, ако е изпълнено условието $\|n(\alpha, \beta)\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Твърдение 13. Всяка права има спрямо K точно две нормални уравнения.

Доказателство. Нека l има спрямо K общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$. Тогава всевъзможните общи уравнения на l спрямо K имат вида

$$l : \lambda(Ax + By + C) = 0, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\text{Но } (\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1 \iff \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Двете нормални уравнения са

$$l : \pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

□

Теорема 14. Нека координатната система K е ортонормирана и са дадени точката $P_0(x_0, y_0)$ и правата l с нормално уравнение

$$l : \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Означаваме $F(x, y) := \alpha x + \beta y + \gamma$. Тогава разстоянието между P_0 и l е

$$d(P_0, l) = |F(x_0, y_0)|,$$

а величината $\vartheta(P, l) = F(x_0, y_0)$ се нарича **ориентирано разстояние** между P_0 и l .

Доказателство. Нека $P_1(x_1, y_1)$ е ортогоналната проекция на P_0 върху l . Понеже $\overrightarrow{P_0 P_1} \perp l$, то $\overrightarrow{P_0 P_1} \parallel n(\alpha, \beta)$, следователно $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0 P_1} = \lambda n$. Тогава

$$d(P_0, l) = \|\overrightarrow{P_0 P_1}\| = |\lambda| \|n\| = |\lambda|.$$

Намираме λ от $\overrightarrow{P_0 P_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \lambda n(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = \lambda \alpha \\ y_1 - y_0 = \lambda \beta \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda \alpha \\ y_1 = y_0 + \lambda \beta. \end{cases}$$

Заместваме в нормалното уравнение на l :

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma &= 0, \\ \alpha(x_0 + \lambda \alpha) + \beta(y_0 + \lambda \beta) + \gamma &= 0, \\ (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + \lambda(\alpha^2 + \beta^2) &= 0, \\ F(x_0, y_0) + \lambda &= 0, \end{aligned}$$

откъдето следва $\lambda = -F(x_0, y_0)$ и $d(P_0, l) = |\lambda| = |F(x_0, y_0)|$.

□

Теорема 15. Нека са дадени правите l_1 и l_2 с нормални уравнения спрямо ортонормирана K

$$l_i : \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0, i = 1, 2.$$

Тогава за ъгълът между l_1 и l_2 е $\angle(l_1, l_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|$.

Доказателство. Нека векторите $n_i(\alpha_i, \beta_i)$ са нормални за $l_i, i = 1, 2$.

Разглеждаме два случая:

1. Ако $0 < \angle(n_1, n_2) \leq \frac{\pi}{2}$, то $\angle(l_1, l_2) = \angle(n_1, n_2)$ и

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \cos \angle(n_1, n_2) = |\cos \angle(n_1, n_2)|.$$

2. Ако $\frac{\pi}{2} < \angle(n_1, n_2) \leq \pi$, то $\angle(l_1, l_2) = \pi - \angle(n_1, n_2)$

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \cos(\pi - \angle(n_1, n_2)) = -\cos \angle(n_1, n_2) = |\cos \angle(n_1, n_2)|.$$

И в двата случая имаме

$$\cos \angle(l_1, l_2) = |\cos \angle(n_1, n_2)| = \frac{|\langle n_1, n_2 \rangle|}{\|n_1\| \|n_2\|} = |\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|$$

и

$$\angle(l_1, l_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|.$$

□

1.3. Равнини в пространството

Забележка 16. Някои от теоремите са напълно аналогични на тези за прави в равнината и ще пропуснем техните доказателства.

Нека $K = Oxyz$ е афинна координатна система в пространството A_3 . Считаме, че е зададена единична отсечка за измерване на дължини.

Определение 17. Нека равнината π се задава спрямо K с уравнението $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, където $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, т.е. уравнението е изпълнено за координатите на т. $P(x, y, z)$ точно когато т. $P \in \pi$.

Уравнение от този вид наричаме **общо уравнение на равнината π спрямо K** .

Забележка 18. От определението е ясно, че е изпълнено $A \neq 0$ или $B \neq 0$ или $C \neq 0$, тъй като в противен случай уравнението е еквивалентно на $l : D = 0$ и, в зависимост от стойността на D , уравнението задава или празното множество, или цялото пространство A_3 .

Твърдение 19.

1. Всяка равнина има поне едно общо уравнение спрямо K .

2. Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където A, B и C не са едновременно равни на 0, е уравнение точно една равнина спрямо K .

Доказателство.

1. Нека са дадени равнината π , точката $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ и компланарните с π неколинеарни вектори $u_i(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2$.

Разглеждаме произволна точка $P(x, y, z)$. Имаме т. $P \in l$ точно когато $\overrightarrow{P_0P} \parallel \pi$, а последното условие е аналогично на това векторите $\overrightarrow{P_0P}, u_1$ и u_2 да бъдат компланарни. Това условие може да се изрази в координатен вид,

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Полагаме

$$A := \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad B := -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad C := \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Тъй като векторите u_1 и u_2 не са колинеарни, имаме

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 2,$$

следователно поне едно от адюнгиранията количества A, B или C на голямата матрица ще бъде различно от 0.

След като разложим пресмятането на детерминантата по първия стълб, можем да запишем полученото уравнение във вида

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

откъдето след полагането $D := -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ получаваме общо уравнение за π .

2. Нека е дадено уравнението $Ax + By + Cz + D = 0$, където A, B и C не са едновременно равни на 0. Без ограничение на общността допускаме, че $A \neq 0$.

Да забележим, че уравнението има поне едно решение, например $x = -\frac{D}{A}$ и $y = z = 0$.

Нека са дадени векторите $u_1(-B, A, 0)$ и $u_2(-\frac{C}{A}, 0, 1)$ и точките $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P(x, y, z)$. Нека освен това координатите на P_0 удовлетворяват уравнението. Тогава $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Нека π е равнината, образувана от векторите u_1 и u_2 . Тогава $\overrightarrow{P_0P} \in \pi \iff$ трите вектора са компланарни. Ако изразим това условие в координатен вид, ще получим оригиналното уравнение. Наистина,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x - x_0 & -B & -\frac{C}{A} \\ y - y_0 & A & 0 \\ z - z_0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \\ &= Ax + By + Cz + D = 0. \end{aligned}$$

Следователно $Ax + By + Cz + D$ е уравнение на равнината π спрямо K .

□

Теорема 20. Нека правите α_1 и α_2 имат спрямо K общи уравнения

$$\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i, i = 1, 2. \quad (3)$$

Означаваме

$$L := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{L} := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Тогава

1. $\pi_1 \equiv \pi_2 \iff \text{rank } L = \text{rank } \tilde{L} = 1.$
2. $\pi_1 \parallel \pi_2$, но $\pi_1 \not\equiv \pi_2 \iff 1 = \text{rank } L < \text{rank } \tilde{L} = 2.$
3. π_1 и π_2 са пресекателни $\iff \text{rank } L = \text{rank } \tilde{L} = 2.$

Определение 21. Всеки вектор, перпендикулярен на някоя равнина π , се нарича **нормален** за π .

Твърдение 22. Ако равнината π има общо уравнение $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ спрямо K и K е ортонормирана, то

1. векторите $u(-B, A, 0)$ и $v(-C, 0, A)$ са неколинеарни, ненулеви и компланарни с π .
2. векторът $n(A, B, C)$ е ненулев и нормален за π .

Доказателство.

Разглеждаме точката $P_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ и точките

$$P_1(x_0 - B, y_0 + A, z_0) \quad P_2(x_0 - C, y_0, z_0 + A),$$

които също принадлежат на l , тъй като

$$\begin{aligned} A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + Cz_0 + D &= (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + (-AB + AB) = 0, \\ A(x_0 - C) + By_0 + C(z_0 + A) + D &= (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + (-AC + AC) = 0. \end{aligned}$$

Тогава векторите $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0P_2}$ са компланарни с π . Но $\overrightarrow{P_0P_1} = u$ и $\overrightarrow{P_0P_2} = v$, следователно u и v са компланарни с π .

Тъй като координатната система K е ортонормирана, имаме

$$\langle u, n \rangle = -AB + AB = 0 = -AC + AC = \langle v, n \rangle,$$

следователно $u \perp n$ и $v \perp n$. Тогава n е перпендикулярен и на всички линейни комбинации на u и v и понеже u и v образуват равнината π , то n е нормален за π . \square

Определение 23. Общото уравнение $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ на равнина π спрямо ортонормирана K се нарича **нормално**, ако е изпълнено условието $\|n(\alpha, \beta, \gamma)\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Твърдение 24. Всяка равнина има спрямо ортонормирана K точно две нормални уравнения.

Теорема 25. Нека координатната система K е ортонормирана и са дадени точката $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и правата l с нормално уравнение

$$l : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Означаваме $F(x, y, z) := \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$. Тогава разстоянието между P_0 и π е

$$d(P_0, \pi) = |F(x_0, y_0, z_0)|,$$

а величината $\partial(P, \pi) = F(x_0, y_0, z_0)$ се нарича **ориентирано разстояние** между P_0 и π .

1.4. Криви от втора степен

Забележка 26. Ще пропуснем доказателствата на фокалните свойства на кривите.

Нека $K = Oxy$ е ортонормирана координатна система в равнината A_2 . Считаме, че са зададени единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

Определение 27. Една крива наричаме **алгебрична крива от степен d** , ако координатите на произволна нейна точка имат алгебрично уравнение от степен d .

Определение 28. Окръжност k с център $P_0(x_0, y_0)$ и радиус $r > 0$ наричаме множеството от всички точки P на разстояние r от P_0 .

Точката $P(x, y)$ е от k точно когато

$$d(P_0, P) = \|P_0P\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Уравнението

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

наричаме **централно уравнение на окръжността k** .

В частност, оттук следва, че окръжностите са алгебрични криви от втора степен.

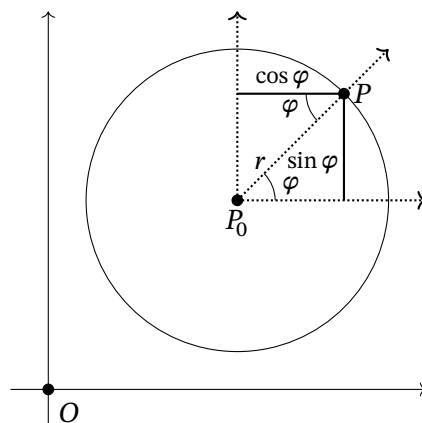
Нека сега $P_0\vec{x}$ е лъчът с начало P_0 , успореден на $O\vec{x}$. Ако означим с φ ориентирания ъгъл между лъчите $P_0\vec{x}$ и $P_0\vec{P}$, от определенията за \sin и \cos за координатите на вектора $\vec{P_0P}$ получаваме

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cos \varphi \\ y - y_0 = r \sin \varphi \end{cases}.$$

Уравненията

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \varphi \\ y = y_0 + r \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

наричаме **скалярни параметрични уравнения на окръжност**.

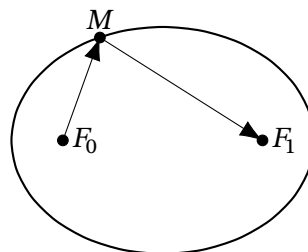


Фигура 1: Окръжност

Определение 29.

Елипса с фокуси F_0 и F_1 и голяма полуос $a > 0$ наричаме множеството k от точки P , за които е изпълнено $\|F_0P\| + \|F_1P\| = 2a$.

Разглеждаме частния случай, в който т. F_0 и т. F_1 имат координати $F_0(-c, 0)$ и $F_1(c, 0)$ спрямо K за някоя константа $c \geq 0$ с $c < a$, наречена **линеен ексцентрицитет** на k . За всяка елипса съществува единствена координатна система, в която уравненията на фокусите имат този прост вид. Въвеждаме следните допълнителни понятия



Фигура 2: Елипса

- Величината $b := \sqrt{a^2 - c^2}$ наричаме **малка полуос** на k . За елипси имаме $b = \sqrt{a^2 - c^2} \leq \sqrt{a^2} = a$.
- Величината $e := \frac{c}{a}$ наричаме **(числен) ексцентрицитет** на k . За елипси имаме $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2}} < 1$.

- **Директриси** на елипсата k наричаме правите с уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $d_2 : x = \frac{a}{e}$.

Разписваме уравнението за k покоординатно:

$$\begin{aligned}
 \|F_0P\| + \|F_1P\| &= 2a \\
 \|F_1P\| &= 2a - \|F_0P\| \quad | \quad (\cdot)^2 \\
 \|F_1P\|^2 &= 4a^2 - 4a\|F_0P\| + \|F_0P\|^2 \\
 4a\|F_0P\| &= 4a^2 + \|F_0P\|^2 - \|F_1P\|^2 \quad | \quad \cdot/4a \\
 \|F_0P\| &= a + \frac{\|F_0P\|^2 - \|F_1P\|^2}{4a} \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2}{4a} \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{c}{a}x \quad | \quad (\cdot)^2 \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= a^2 + 2xc + \frac{c^2}{a^2}x^2 \\
 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \quad | \quad /(a^2 - c^2) \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1.
 \end{aligned}$$

Така получаваме **метрично канонично уравнение на елипсата k спрямо K** :

$$k : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Веднага виждаме, че елипсите са алгебрични криви от втора степен и че централното уравнение на окръжност е частен случай с $a = b = r \iff c = 0$.

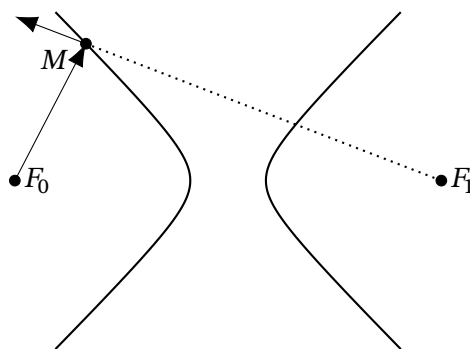
Скалярни параметрични уравнения на елипса можем да изведем аналогично на тези за окръжност. В нашия опростен случай те имат вида

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

Теорема 30 (Фокално свойство на елипса). *Всеки лъч с начало m . F_0 след отражение в произволна точка M от елипсата минава през m . F_1 (фигура 2).*

Определение 31.

Хипербола с фокуси т. F_0 и т. F_1 и **реална полуос** $a > 0$ наричаме двусвързаното множество k от точки P , за които е изпълнено $||F_0P|| - ||F_1P|| = 2a$. Разглеждаме частния случай, в който т. F_0 и т. F_1 имат координати $F_0(-c, 0)$ и $F_1(c, 0)$ спрямо K за някоя константа $c \geq 0$ с $c > a$, наречена **линеен ексцентрицитет** на k . За всяка хипербола съществува единствена координатна система, в която уравненията на фокусите имат този прост вид. Въвеждаме следните допълнителни понятия



Фигура 3: Хипербола

- Величината $b := \sqrt{c^2 - a^2}$ наричаме **имагинерна полуос** на k .
- Аналогично на елипсите, величината $e := \frac{c}{a}$ наричаме **(числен) ексцентрицитет** на k . За хиперболи имаме $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2}} > 1$.
- Аналогично на елипсите, **директриси** на хиперболата k наричаме правите с уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $d_2 : x = \frac{a}{e}$.

Напълно аналогично на случая с елипса, разписвайки уравнението за k покоординатно стигаме до уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Единствената разлика е, че тук $b = -(a^2 - c^2)$. Така получаваме **метрично канонично уравнение** на хиперболата k спрямо K :

$$k : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Веднага виждаме, че хиперболите са алгебрични криви от втора степен.

Скаларните параметрични уравнения на хипербола са различни за левия и десния клон на хиперболата. В нашия опростен случай те имат вида

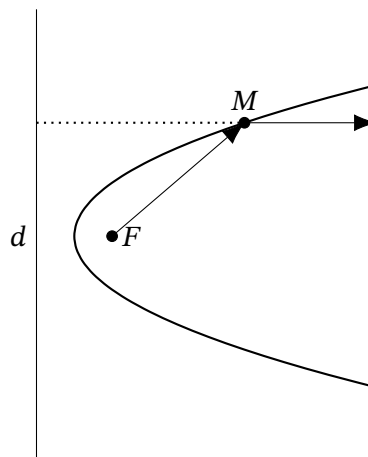
$$\begin{cases} x = \pm a \cosh \varphi \\ y = b \sinh \varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

Теорема 32 (Фокално свойство на хипербола). *Всеки лъч с начало т. F_0 след отражение в произволна точка M от хиперболата лежи върху правата, минаваща през т. M и т. F_1 (фигура 3).*

Определение 33.

Парабола с фокус т. F и неминаваща през F права d , наречена **директриса**, наричаме множеството k от точки P , за които е изпълнено $\|FP\| = d(d, P)$. Дефинираме **линейния и числения эксцентрицитет** на параболата K да бъдат $c = e = 1$.

Разглеждаме частния случай, когато d има уравнение $d : x = -\frac{p}{2}$ и т. F има координати $F(\frac{p}{2}, 0)$ спрямо K за някоя константа $p > 0$, наречена **параметър**. За всяка парабола съществува единствена координатна система, в която уравненията на фокуса и директрисата имат този прост вид.



Фигура 4: Парабола

Нека т. P има координати $P(x, y)$ спрямо K . Тъй като уравнението $d : x = -\frac{p}{2}$ е нормално, теорема 14 ни дава $d(d, P) = x + \frac{p}{2}$. Разписваме уравнението за k покоординатно:

$$\begin{aligned}\|FP\| &= d(d, P) \\ \|FP\|^2 &= d(d, P)^2 \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \\ y^2 &= 2px.\end{aligned}$$

Така получаваме **метрично канонично уравнение на параболата k спрямо K** :

$$k : y^2 = 2px.$$

Веднага виждаме, че параболите са алгебрични криви от втора степен.

Ако вземем u за параметър, получаваме следните **скалярни параметрични уравнения** на параболата k спрямо K :

$$k : \begin{cases} x = \frac{\varphi^2}{2p} \\ y = \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Теорема 34 (Фокално свойство на парабола). *Всеки лъч с начало т. F след отражение в произволна точка M от параболата, става перпендикулярен на директрисата d (фигура 4).*

2. Примерни задачи

В конспекта не е посочен списък с възможни задачи, затова съм включил няколко по-обширни задачи от Богдан Александров (лекции), Станислав Иванов (упражнения) и Янис Василев (записки), [Записки от лекции и упражнения по аналитична геометрия](#).

2.1. Прави в равнината

Задача 1. Точките A и B и правите a и b имат спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ координати $A(1, -2)$, $B(0, -1)$ и общи уравнения

$$a : 3x + 4y + 2 = 0,$$

$$b : 5x - 12y + 1 = 0.$$

Да се намерят:

- Общо уравнение на правата l през т. A , успоредна на a
- Общо уравнение на правата t през т. B , перпендикулярна на b
- Общо уравнение на правата AB
- Координатите на т. B' , която е ортогонално симетрична на т. B относно правата a
- Разстоянието от т. A до a
- Общо уравнение на ъглополовящата на правите a и b
- Ъгълът между правите a и b
- Общо уравнение на правата t през т. B и т. $T = a \cap b$
- Да се определи положението на т. A и т. B спрямо правата a

Решение. а) Правата l е успоредна на a , следователно тя има общо уравнение от вида

$$l : 3x + 4y + C = 0,$$

където C е избрано спрямо условието l да минава през т. A , т.е.

$$C = -3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 5.$$

И така, l има общо уравнение $l : 3x + 4y + 5 = 0$.

- б) Правата t е перпендикулярна на b , следователно нормалните вектори на b (например $n_b(5, -12)$) са колинеарни с t . Нека т. P има координати $P(x, y)$ спрямо K . От условието $P \in t \iff \overrightarrow{BP} \parallel n_b$ намираме общото уравнение

$$t : \det \begin{pmatrix} x & 5 \\ y + 1 & -12 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } t : 12x + 5y + 5 = 0.$$

- в) Нека т. P има координати $P(x, y)$ спрямо K . От условието $P \in AB \iff \overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{BA}$ намираме общото уравнение

$$AB : \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ y+1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } AB : x + y + 1 = 0.$$

- г) Нека B' има спрямо K координати $B'(x', y')$. Първо намираме правата BB' от условието $BB' \perp a$, което е еквивалентно на $BB' \parallel n_a(3, 4)$. Нека т. P има координати (x, y) спрямо K . От условието $P \in BB' \iff \overrightarrow{BP} \parallel n_a$ намираме общото уравнение

$$BB' : \det \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 4 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } BB' : 4x - 3y - 3 = 0.$$

Координатите на пресечната точка B_a на a и BB' (ортогоналната проекция на B върху a) намираме от системата

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 & | (\times 3) \\ 4x - 3y - 3 = 0 & | (\times 4) \end{cases} \sim \begin{cases} 9x + 12y + 6 = 0 \\ 16x - 12y - 12 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 25x = 6 \\ 12y = 16x - 12 \end{cases},$$

откъдето получаваме $B_a(6/25, -17/25)$.

Остава да намерим координатите на B' . Имаме $\overrightarrow{BB_a} = \overrightarrow{B_a B'}$, откъдето

$$\begin{cases} 6/25 = x' - 6/25 \\ -17/25 + 1 = y' + 17/25 \end{cases} \sim \begin{cases} x' = 12/25 \\ y' = -34/25 + 1 = -9/25 \end{cases}.$$

Получихме $B'(12/25, -9/25)$.

- д) Разстоянието $d(A, a)$ намираме използвайки теорема 14:

$$d(A, a) = |\partial(A, a)| = \frac{|F_a(A)|}{\|n_a\|},$$

където $F_a(x, y) = 3x + 4y + 2$ е лявата част на зададеното общо уравнение на a , а $n_a(3, 4)$ е съответният нормален вектор. Директно пресмятаме разстоянието и получаваме

$$d(A, a) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 2|}{5} = \frac{3}{5}.$$

- е) Ъглополовящите $u_{1,2}$ на правите a и b се състоят от всички точки $P(x, y)$, за които $d(P, a) = d(P, b)$. Последното условие е еквивалентно на условието $\partial(P, a) \pm \partial(P, b) = 0$, откъдето намираме уравненията на ъглополовящите:

$$\begin{aligned} u_{1,2} : \frac{3x + 4y + 2}{5} \pm \frac{5x - 12y + 1}{13} &= 0, \\ u_{1,2} : (39x + 52y + 26) \pm (25x - 60y + 5) &= 0, \\ u_1 : 64x - 8y + 31 &= 0, \\ u_2 : 14x + 112y + 21 &= 0. \end{aligned}$$

ж) Ъгът между a и b намираме чрез нормалните им вектори $n_a(3, 5)$ и $n_b(5, -12)$:

$$\angle(a, b) = \arccos \frac{|\langle n_a, n_b \rangle|}{\|n_a\| \|n_b\|} = \arccos \left| -\frac{33}{65} \right| = \arccos \frac{33}{65}$$

з) Координатите на пресечната точка T на a и b намираме от системата

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 & (\times 3) \\ 5x - 12y + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 9x + 12y + 6 = 0 \\ 5x - 12y + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 14x = -7 \\ 12y = 5x + 1 \end{cases}$$

откъдето получаваме $T(-1/2, -1/8)$.

Нека $t.P$ има координати (x, y) спрямо K . От условието $P \in t \iff \vec{TP} \parallel \vec{TB}$ намираме общото уравнение

$$t : \det \begin{pmatrix} x + 1/2 & 1/2 \\ y + 1/8 & -7/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2x + 1 & 1 \\ 8y + 1 & -7 \end{pmatrix} = -14x - 8y - 8 = 0$$

или $t : 7x + 4y + 4 = 0$.

и) Означаваме $F_a(x, y) = 3x + 4y + 2$. Имаме, че $F_a(A) = F_a(1, -2) = -3 < 0$ и $F_a(B) = F_a(0, -1) = -2 < 0$. Двете точки не лежат върху правата a и освен това $F_a(A)$ и $F_a(B)$ имат еднакви знаци, следователно A и B лежат в една и съща отворена полуравнина относно a .

□

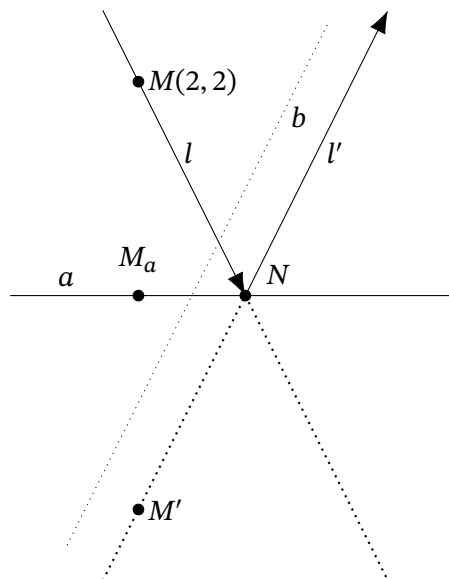
Задача 2. В равнината е зададена ортонормирана координатна система $K = Oxy$. Дадени са правите

$$a : x + y = 0$$

$$b : x - 3y - 2 = 0$$

Светлинен лъч $\vec{\Gamma}$ минава през точка $M(2, 2)$ и се отразява от правата a . Отразеният лъч $\vec{l'}$ е колинеарен с правата b .

Да се намерят уравнения спрямо K на правите l и l' , съдържащи съответно падащия лъч $\vec{\Gamma}$ и отразения лъч $\vec{l'}$.



Фигура 5: Отразен светлинен лъч

Решение.

1. Намираме координатите на ортогоналната проекция M_a на точката M върху a , използвайки нормален за a вектор $n_a(1, 1)$.

От условието $n_a \parallel \overrightarrow{MM_a}$ намираме ограничението

$$M_a(x, y) : \det \begin{pmatrix} 1 & x-2 \\ 1 & y-2 \end{pmatrix} = y - x = 0,$$

а от ограничението $M_a \in a$ получаваме, че т. M_a има координати $(0, 0)$ спрямо K .

2. Намираме координатите на ортогонално симетричната точка $M'(x', y')$ на M относно a . Имаме $\overrightarrow{MM_a} = \overrightarrow{M_aM'}$, откъдето

$$\begin{cases} 2 - 0 = 0 - x' \\ 2 - 0 = 0 - y' \end{cases} \implies x' = y' = -2,$$

т.е. $M'(-2, -2)$.

3. Намираме уравнението на правата l' . Тъй като $l' \parallel b$, правата l' има общо уравнение

$$l' : x - 3y + C = 0,$$

където C е подбрано спрямо условието l' да минава през т. M' , т.е.

$$C = -1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = -4.$$

И така, l' има общо уравнение $l' : x - 3y - 4 = 0$.

4. Намираме координатите на пресечната точка N на a и l' (а също и l'):

$$N(x, y) : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -y \\ -4y = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases},$$

т.е. $N(1, -1)$.

5. Намираме общо уравнение на l . Използваме това, че l минава през т. M и т. N , т.е. т. $P(x, y) \in l \iff \overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{MN}$:

$$l : \det \begin{pmatrix} x-2 & 1-2 \\ y-2 & -1-2 \end{pmatrix} = -3x + y + 4 = 0.$$

□

2.2. Равнини в пространството

Задача 3. В пространството е зададена ортонормирана координатна система $K = Oxyz$. Спрямо нея точките A, B, C и D имат координати

$$\begin{array}{ll} A(3, 1, 4) & C(1, 2, -1) \\ B(2, 1, 3) & D(0, -3, 2), \end{array}$$

α равнината β има общо уравнение

$$\beta : x + y - z + 1 = 0.$$

Да се намерят:

- а) Общо уравнение на равнината α , минаваща през точките A, B и C
- б) Параметрични уравнения на права h , минаваща през $m. D$ и ортогонална на равнината α
- в) Координатите на ортогонално симетричната на $m. D$ спрямо α точка $m. D'$
- г) Общо уравнение на равнината γ , минаваща през $m. D$ и успоредна на β
- д) Координатите на някой вектор v , компланарен с α и β
- е) Параметрични уравнения на пресечницата m на α и β
- ж) Параметрични уравнения на права l , така че светлинния лъч Γ през $m. D$ след отразяването си от α (озн. отразения лъч с l') пресича β под прав ъгъл
- з) Общо уравнение на равнината π_1 , минаваща през A и ортогонална на правата m
- и) Общо уравнение на равнината π_2 , съдържаща правата l' и успоредна на правата m
- к) Общо уравнение на равнината π_3 , съдържаща правата l' и ортогонална на равнината α

Решение. а) Нека $t. P(x, y, z) \in \alpha$. Тогава $\vec{AP} \parallel \vec{AB}(-1, 0, -1) \parallel \vec{AC}(-2, 1, -5)$, което условие ни позволява да намерим общо уравнение на α :

$$\begin{aligned} \alpha : \det \begin{pmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-4 & -1 & -5 \end{pmatrix} &= \\ &= -1(z-4) + (-2)(y-1)(-1) - (x-3)(-1) - (-1)(y-1)(-5) = \\ &= -z + 4 + 2y - 2 + x - 3 - 5y + 5 = \\ &= \boxed{x - 3y - z + 4 = 0}. \end{aligned}$$

- б) Правата h е успоредна на нормалния за α вектор на $n_\alpha(1, -3, -1)$, следователно тя има векторно параметрично уравнение

$$h : \overrightarrow{OD} + \lambda n_\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скалярно параметрично уравнение

$$h : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- в) За да намерим ортогонално симетричната на т. D спрямо α точка т. $D'(x', y', z')$, първо ще намерим пресечната точка т. D_α на правата h и равнината α .

Намираме стойността на параметъра λ за уравнението на h , за която h се пресича α :

$$\begin{aligned} \lambda - 3(-3 - 3\lambda) - (2 - \lambda) + 4 &= 0 \\ \lambda + 9 + 9\lambda - 2 + \lambda + 4 &= 0 \\ 11\lambda &= -11 \\ \lambda &= -1, \end{aligned}$$

откъдето намираме координатите $(-1, 0, 3)$ на т. D_α .

След това, развиваме очевидното равенство $\overrightarrow{D_\alpha D'} = \overrightarrow{DD_\alpha}$ покоординатно:

$$\begin{cases} x' + 1 = -1 \\ y' - 0 = 3 \\ z' - 3 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 3 \\ z' = 4, \end{cases}$$

т.е. $D'(-2, 3, 4)$.

- г) Тъй като равнината γ е успоредна на β , тя има общо уравнение

$$\gamma : x + y - z + C = 0,$$

където C е подбрано спрямо условието γ да минава през т. D , т.е.

$$C = -(0 + (-3) - 2) = 5.$$

И така, $\gamma : x + y - z + 5 = 0$.

- д) Търсим едновременни решения на известните общи уравнения на равнините α и β :

$$\begin{cases} \alpha : x - 3y - z + 4 = 0 \\ \beta : x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 3/4 \\ z = x + 7/4. \end{cases}$$

Очевидно точките $V_0(0, \frac{3}{4}, \frac{7}{4})$ и $V_1(1, \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{4})$ удовлетворяват горната система, следователно векторът $v = \overrightarrow{V_0V_1}$ с координати $(1, 0, 1)$ е колинеарен и с двете равнини.

е) Пресечницата m на α и β има векторно параметрично уравнение

$$m : \overrightarrow{OV_0} + \mu v, \mu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скалярно параметрично уравнение

$$m : \begin{cases} x = \mu \\ y = 3/4 \\ z = 7/4 + \mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

ж) Тъй като вече разполагаме с координатите на ортогонално симетричната на D относно α точка D' и нормалният за α вектор $n_\beta(1, 1, -1)$, можем да намерим векторно параметрично уравнения на правата l' :

$$l' : \overrightarrow{OD'} + \nu n_\beta, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скалярното параметрично уравнение

$$l' : \begin{cases} x = -2 + \nu \\ y = 3 + \nu \\ z = 4 - \nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

Сега намираме стойността на параметъра ν , за която l' пресича равнината α :

$$\begin{aligned} (-2 + \nu) - 3(3 + \nu) - (4 - \nu) + 4 &= 0 \\ -2 + \nu - 9 - \nu - 4 + \nu + 4 &= 0 \\ \nu &= 11 \end{aligned}$$

т.е. пресечната точка N на l' и α има координати $N(9, 14, -7)$.

Сега намираме векторно параметрично уравнения на правата l , минаваща през т. D и т. N :

$$l : \overrightarrow{OD} + \xi \overrightarrow{DN}, \xi \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скалярното параметрично уравнение

$$l : \begin{cases} x = 9\xi \\ y = -3 + 17\xi \\ z = 2 - 9\xi \end{cases}, \xi \in \mathbb{R}.$$

- з) Първо намираме два нормални за правата m вектора. Нека $u(x, y, z)$ е произволен вектор. Тъй като v е направляващ за m , u е нормален за m само ако

$$\langle u, v \rangle = x + z = 0.$$

От горното условие виждаме, че два нормални за m вектора са

$$u_1(0, 1, 0), \quad u_2(-1, 0, 1).$$

Нека т. P има спрямо K координати (x, y, z) . Тогава т. $P \in \pi_1$ точно тогава, когато векторът \overrightarrow{AP} е колинеарен с u_1 и u_2 , т.е.

$$\pi_1 : \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & -1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x-3) - (-1)(z-4) = \boxed{x + z - 7 = 0}.$$

- и) Имаме, че т. $D'(-2, 3, 4) \in l'$ и векторът $n_\beta(1, 1, -1)'$ е направляващ за l' , а $v(1, 0, 1)$ е направляващ за m . Нека т. P има спрямо K координати (x, y, z) . Тогава т. $P \in \pi_2$ точно тогава, когато са колинеарни векторите $\overrightarrow{D'P}$, n_β и v , т.е.

$$\begin{aligned} \pi_2 : \det \begin{pmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ y-3 & 1 & 0 \\ z-4 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= (x+2) + (y-3)(-1) - (z-4) - (y-3) = \\ &= \boxed{x - 2y - z + 12 = 0}. \end{aligned}$$

- к) Аналогично на π_2 , имаме, че т. $P \in \pi_3$ точно тогава, когато са колинеарни векторите $\overrightarrow{D'P}$, n_β и $n_\alpha(1, -3, -1)$

$$\begin{aligned} \pi_3 : \det \begin{pmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ y-3 & 1 & -3 \\ z-4 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= \\ &= (x+2)(-1) + (-3)(z-4) + (y-3)(-1) - (z-4) - (y-3)(-1) - (x+2)(-3)(-1) = \\ &= (-4)(x+2) + (-4)(z-4) = 0 \\ \text{или } \pi_3 : x + z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

□

2.3. Прави в пространството

Задача 4. В пространството е зададена ортонормирана координатна система $K = Oxyz$. Спрямо нея кръстосаните прави g и h имат скалярни параметрични уравнения

$$g : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad h : \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - 5\mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Да се намери (скалярно) параметрично уравнение на трансверзалата t на g и h , за която:

- а) Точката $A(1, 1, 1)$ лежи върху t
- б) t лежи в равнината $\alpha : 2x + y - 3z + 6 = 0$
- в) t е успоредна на правата

$$\alpha : \begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение. Тъй като правата t е трансверзала на g и h , тя има по една обща точка с двете прави. Да означим тези точки с G и H , т.е.

$$t \cap g = \{G(x_g, y_g, z_g)\} \quad \text{и} \quad t \cap h = \{H(x_h, y_h, z_h)\}.$$

Тъй като $G \in g$ и $H \in h$, то техните координати удовлетворяват уравненията на g и h за някои стойности на параметрите λ и μ , т.е.

$$G(1 + 2\lambda_G, 4 + 4\lambda_G, 4 + 4\lambda_G) \quad \text{и} \quad H(-1, -1 - 5\mu_H, 1 + 3\mu_H).$$

Тогава векторът \overrightarrow{HG} има координати

$$\overrightarrow{HG}(2 + 2\lambda_G, 5 + 4\lambda_G + 5\mu_H, 3 + \lambda_G - 3\mu_H).$$

- а) За да принадлежи точката A на трансверзалата t , искаме векторите

$$\overrightarrow{AG}(2\lambda_G, 3 + 4\lambda_G, 3 + \lambda_G) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AH}(-2, -2 - 5\mu_H, 3\mu_H)$$

да бъдат колинеарни, т.е. съществува $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такова, че $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AH}$. Разписваме това уравнение покоординатно:

$$\begin{cases} 2\lambda_G = -2k & (\times 1/2) \\ 3 + 4\lambda_G = -2k - 5k\mu_H & \text{изваждаме третото уравнение} \\ 3 + \lambda_G = 3k\mu_H \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_G = -k \\ 3\lambda_G = -2k - 8k\mu_H \\ 3 + \lambda_G = 3k\mu_H \end{cases}.$$

От второто уравнение получаваме

$$-k = -8k\mu_H \implies \mu_H = 1/8 \implies H(-1, -13/8, 11/8).$$

Правата t има векторно параметрично уравнение

$$t : \overrightarrow{OA} + 8\nu\overrightarrow{AH}, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скалярно параметрично уравнение

$$t : \begin{cases} x = 1 - 16\nu \\ y = 1 - 21\nu \\ z = 1 + 3\nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

- б) Намираме λ_G и μ_H като директно заместяваме координатите на G и H в уравнението на α :

$$\begin{aligned} 2(1 + 2\lambda_G) + (4 + 4\lambda_G) - 3(4 + \lambda_G) + 6 &= 0 \\ 2 + 4\lambda_G + 4 + 4\lambda_G - 12 + 3\lambda_G + 6 &= 0 \\ 5\lambda_G &= 0, \end{aligned}$$

следователно $\lambda_G = 0$ и т. G има координати $G(1, 4, 4)$.

$$\begin{aligned} 2(-1) + (-1 - 5\mu_H) - 3(1 + 3\mu_H) + 6 &= 0 \\ -2 - 1 - 5\mu_H - 3 - 9\mu_H + 6 &= 0 \\ -14\mu_H &= 0, \end{aligned}$$

следователно $\mu_H = 0$ и т. H има координати $H(-1, -1, 1)$.

Правата t има векторно параметрично уравнение

$$t : \overrightarrow{OG} + \nu \overrightarrow{GH}, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скалярно параметрично уравнение

$$t : \begin{cases} x = 1 - 2\nu \\ y = 4 - 5\nu \\ z = 4 - 3\nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

- в) Първо намираме скалярно параметрично уравнение на правата a . Събирайки двете уравнения, получаваме

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - 4z + 1 = 0 \end{cases} \mid \text{прибавяме първото уравнение} \quad \sim \\ &\sim \begin{cases} 4z = 3 - x - 5y = 7/3 - 5y \\ x = 2/3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Параметризираме горната система чрез $\xi \in \mathbb{R}$, полагайки $y = 4\xi$, и получаваме

$$a : \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 4\xi \\ z = 7/12 - 5\xi \end{cases}, \xi \in \mathbb{R}.$$

Означаваме направляващия вектор от горното уравнение чрез $v_a(0, 4, -5)$. За да бъдат колинеарни правите t и a е достатъчно двойка техни направляващи вектори да бъдат колинеарни, т.е. $\overrightarrow{GH} \parallel v_a \iff \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \overrightarrow{GH} = kv_a$. Разписвайки това уравнение само за първата координата, получаваме

$$2 + 2\lambda_G = 0 \cdot k \implies \lambda_G = -1 \implies G(-1, 0, 3).$$

Разполагайки с точка $G \in t$ и направляващ вектор $v_a \parallel t$, за трансверзалата t получаваме векторно параметрично уравнение

$$t : \overrightarrow{OG} + \nu v_a, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скалярно параметрично уравнение

$$t : \begin{cases} x = -1 \\ y = 4\nu \\ z = 3 - 5\nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

□

2.4. Канонизиране на криви от втора степен

Задача 5. *Спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ е зададена кривата*

$$c : 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 16y - 8 = 0.$$

Да се намери метрично канонично уравнение на c и да намерят координатите на фокусите на c спрямо K .

Решение. 1. Търсим ортонормирана координатна система K' , в която уравнението на кривата c да няма смесен квадратен член xy . Означаваме матрицата на квадратичната форма $4x^2 - 4xy + y^2$ с

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Търсим собствените вектори на A :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

което уравнение е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} 4x - 2y = \lambda x \\ -2x + y = \lambda y \end{cases} \sim \begin{cases} -2y = (\lambda - 4)x \\ (1 - \lambda)y = 2x \end{cases} \sim \begin{cases} y = \frac{4-\lambda}{2}x \\ y = \frac{2}{1-\lambda}x. \end{cases} \quad (4)$$

За да получим нормирани собствени вектори, искаме

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1 \\ \left(1 + \frac{4}{(1-\lambda)^2}\right)x^2 &= 1 \\ \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 5}{(1-\lambda)^2}x^2 &= 1.\end{aligned}$$

За определеност взимаме само една двойка корени

$$x = \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}} \text{ и } y = \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}} \quad (5)$$

Изваждайки двете уравнения в (4), стигаме до характеристичния полином на A :

$$\frac{4-\lambda}{2} - \frac{2}{1-\lambda} = 0 \iff 4-\lambda-4\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-5\lambda=0,$$

чиито корени са $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 5$, а замествайки в (5), директно получаваме собствените вектори

$$v_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \qquad v_2\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Желаната ротация има вида

$$R : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'). \end{cases}$$

Спрямо новата координатна система K' кривата c има вида

$$c : 5y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{16}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 8 = 5y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x' - \frac{20}{\sqrt{5}}y' - 8 = 0,$$

което можем да опростим до

$$c : 5\sqrt{5}y'^2 - 30x' - 20y' - 8\sqrt{5} = 0,$$

2. Имаме уравнения на парабола, но то не е канонично. Търсим афинна координатна система K'' , в която параболата да е центрирана, т.е. търсим трансляция

$$T : \begin{cases} x' = x'' + a \\ y' = y'' + b, \end{cases}$$

така че в новата координатна система уравнението да има вида $c : y'' = 2px''$ за някое число p .

Правим трансляцията и след това намираме подходящи стойности за параметрите a и b :

$$\begin{aligned}5\sqrt{5}y'^2 - 30x' - 20y' - 8\sqrt{5} &= 0 \\5\sqrt{5}y''^2 + 10\sqrt{5}y''b + 5\sqrt{5}b^2 - 30x'' - 30a - 20y'' - 20b - 8\sqrt{5} &= 0 \\5\sqrt{5}y''^2 + (10\sqrt{5}b - 20)y'' &= 30x'' + (-5\sqrt{5}b^2 + 30a + 20b + 8\sqrt{5}).\end{aligned}$$

Приравняваме на нула коефициента пред y'' и свободния коефициент:

$$\begin{aligned}10\sqrt{5}b - 20 &= 0 \implies b = \frac{2}{\sqrt{5}} \\a &= \frac{5\sqrt{5}b^2 - 20b - 8\sqrt{5}}{30} = \frac{4\sqrt{5} - \frac{40}{\sqrt{5}} - 8\sqrt{5}}{30} = \frac{20 - 40 - 40}{30\sqrt{5}} = \frac{-60}{30\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Тогава за композираната смяна на координатната система от K'' към K получаваме

$$R \circ T : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'' + a - 2y'' - 2b) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'' + 2a + y'' + b) \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x'' - 2y'' - \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x'' + y'' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

и спрямо K'' параболата има уравнение

$$c : 5\sqrt{5}y''^2 = 30x'' \iff c : y''^2 = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}x''$$

3. Фокусът на параболата c има спрямо K'' координати $F\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}, 0\right)$. Спрямо K фокусът има координати

$$R \circ T : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{9}{10} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5} \end{cases},$$

т.е. $F\left(-\frac{9}{10}, \frac{1}{5}\right)$.

□

3. Литература

Богдан Александров (лекции), Станислав Иванов (упражнения) и Янис Василев (записки). *Записки от лекции и упражнения по аналитична геометрия*. 2019. URL: <https://ivasilev.net/files/%D0%A4%D0%9C%D0%98/%D0%90%D0%93/> (дата на посещ. 19.01.2019).

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: <https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrnd0sX> (дата на посещ. 24.03.2019).